

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 18.07.2023

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C .

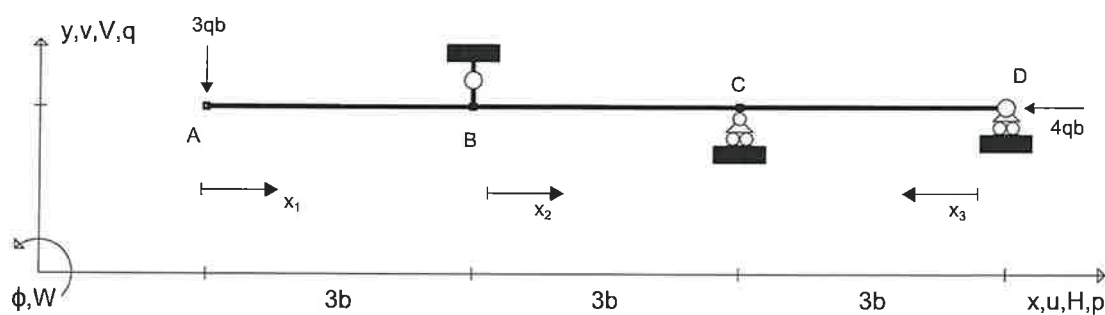
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto D , φ_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 18.07.23*001



Eq. di CONSISTENZA: $\Delta\varphi_C = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

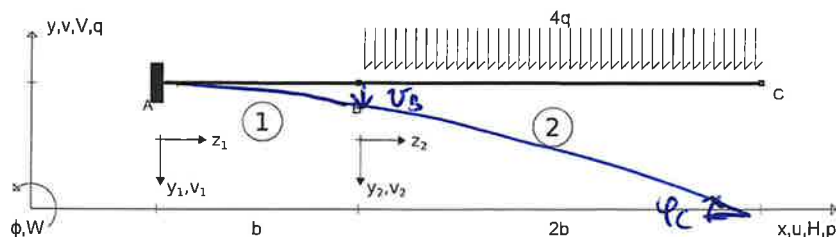
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA 18.07.23*001



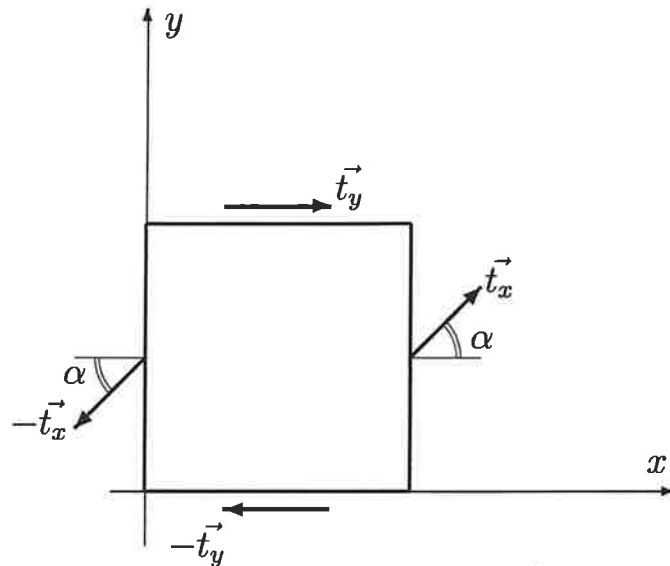
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\Uparrow) &= 8pb; & M_A (\curvearrowright) &= 16pb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 8pb; & M_{AB} &= -16pb^2 + 8pbz_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 8pb - 4pz_2; & M_{BC} &= -8pb^2 + 8pbz_2 - 2pz_2^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0)=0 &= 0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=b)=v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{\epsilon_s} (8pb^2z_1^2 - \frac{4}{3}pbz_1^3); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{\epsilon_s} (16pb^2z_1 - 4pbz_1^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{\epsilon_s} (4pb^2z_2^2 - \frac{4}{3}pbz_2^3 + \frac{1}{6}pz_2^4 + 12pb^3z_2 + \frac{4}{3}qz_2^3 + 12pb^3); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{\epsilon_s} (8pb^2z_2 - 4pbz_2^2 + \frac{4}{3}qz_2^2 + 12pb^3); \\
 v_B &= \frac{20pb^4}{3\epsilon_s} \quad (\downarrow); & \varphi_C &= \frac{52pb^3}{3\epsilon_s} \quad (\nearrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 300^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$; $\cos \alpha = 1/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 30$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

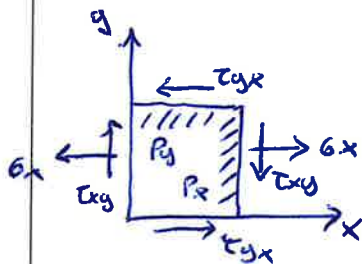
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 15,000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -25,981 \text{ (MPa)};$$

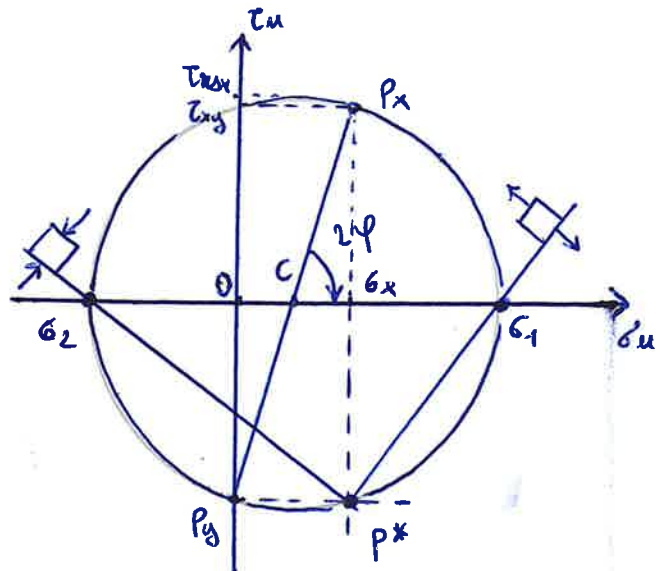
$$\sigma_1 = 34,542 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -19,542 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 27,042 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

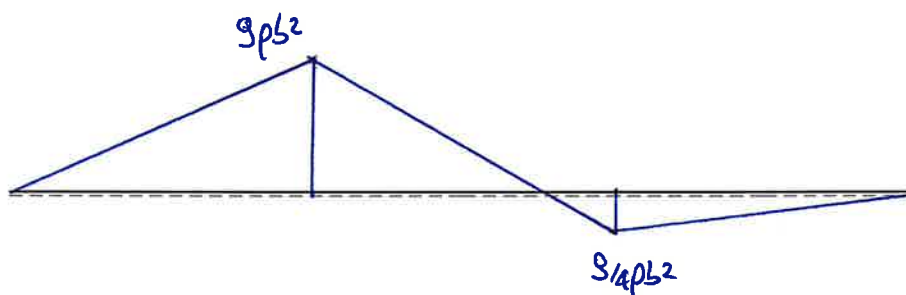
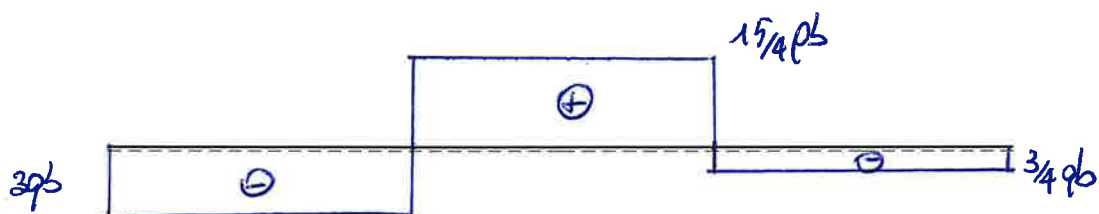
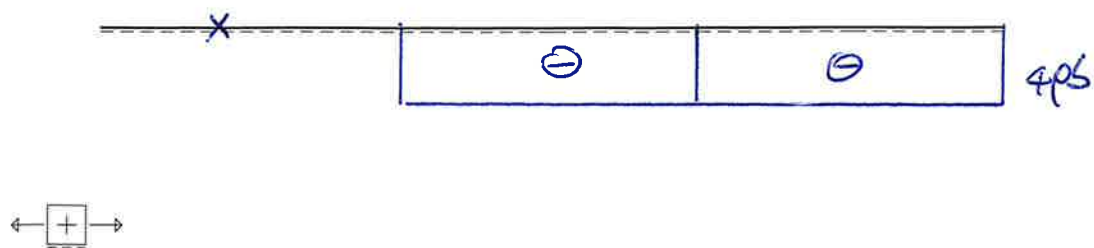


$$P_x = (15,000; 25,981)$$

$$P_y = (0,000; -25,981)$$



$$\varphi = -36,95 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$H_B (\Rightarrow) = 4pb$	$V_B (\uparrow) = 27/4 pb$	$V_C (\uparrow) = 9/2 pb$	$V_D (\uparrow) = 3/4 pb$	$M_C (\curvearrowright) = 9/4 pb^2$
$N_{AB} = //$	$T_{AB} = -3pb$	$M_{AB} = -3pb \times 1$		
$N_{BC} = -4pb$	$T_{BC} = 15/4 pb$	$M_{BC} = -3pb^2 + 15/4 pb \times 2$		
$N_{DC} = -4pb$	$T_{DC} = -3/4 pb$	$M_{DC} = 3/4 pb \times 3$		
$\varphi_D = 9pb^3/8EI$				

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 18.07.2023

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui solli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo: e-mail: Matricola:

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C, M_C .

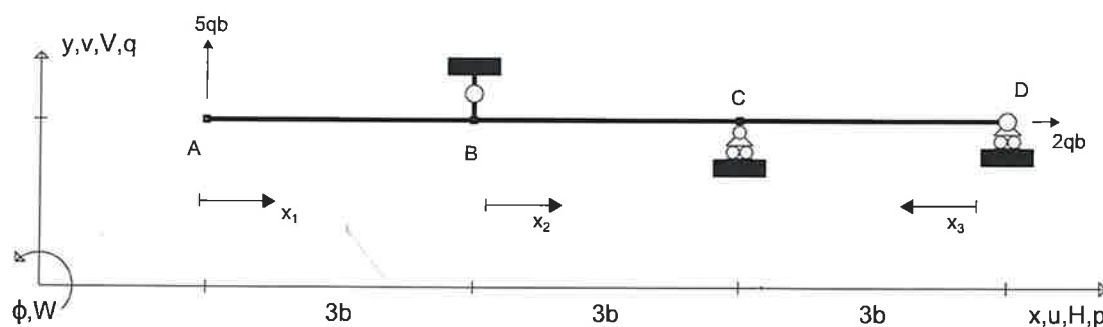
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto D, φ_D

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 18.07.23*002



Eq. di compatibilità $\Delta\varphi_C = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

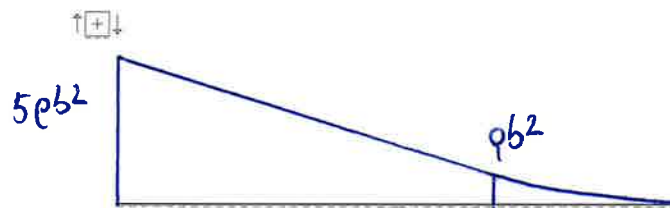
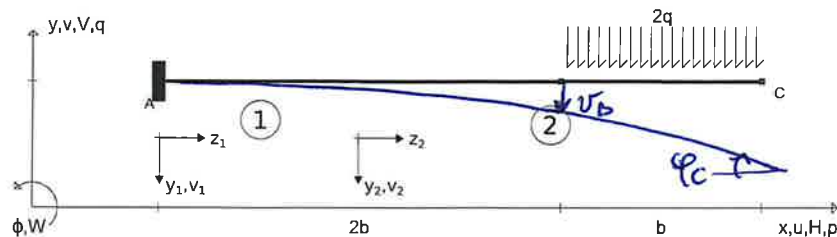
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B, v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA 18.07.23*002



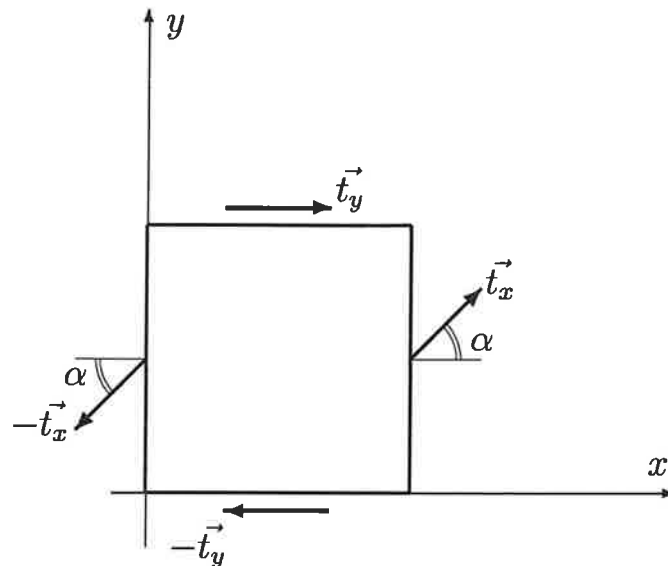
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 2pb; & M_A (\curvearrowright) &= 5pb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 2pb; & M_{AB} &= -5pb^2 + 2qbz_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= 2qb - 2qz_2; & M_{BC} &= -pb^2 + 2qbz_2 - qz_2^2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=2b)=v_2'(z_2=0); \\
 \text{c.c in C} &= //; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{2} pb^2 z_1^2 - \frac{1}{3} qb z_1^3 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (5pb^2 z_1 - qb z_1^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} qb^2 z_2^2 - \frac{1}{3} qb z_2^3 + \frac{1}{2} pb^2 z_2 + 6pb^3 z_2 + \frac{27}{3} pb^3 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (qb^2 z_2 - qb z_2^2 + \frac{1}{3} q z_2^2 + 6pb^3); \\
 v_B &= \frac{22pb^4}{3EI} (\downarrow); & \varphi_C &= \frac{19pb^3}{3EI} (\uparrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 330^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -1/2$; $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 30$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

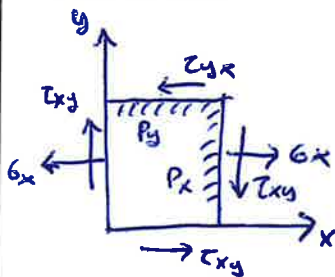
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = 25,381$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -15,000$ (MPa);

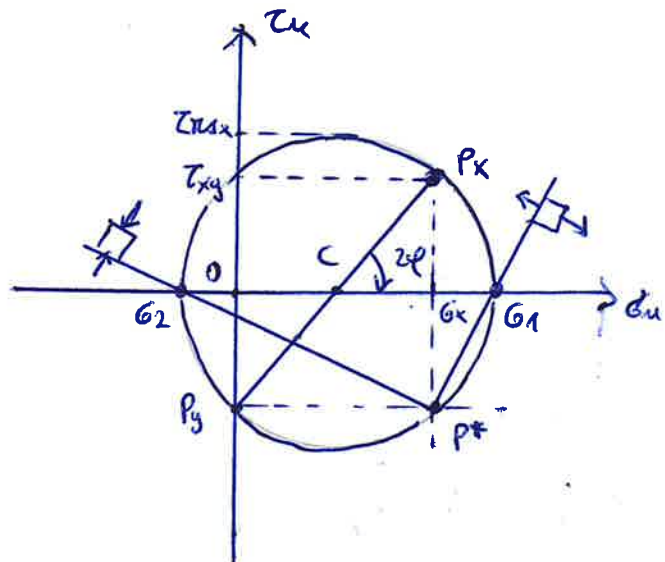
$\sigma_1 = 32,853$ (MPa); $\sigma_2 = -6,853$ (MPa); $\tau_{\max} = 19,843$ (MPa);

cerchio di Mohr:

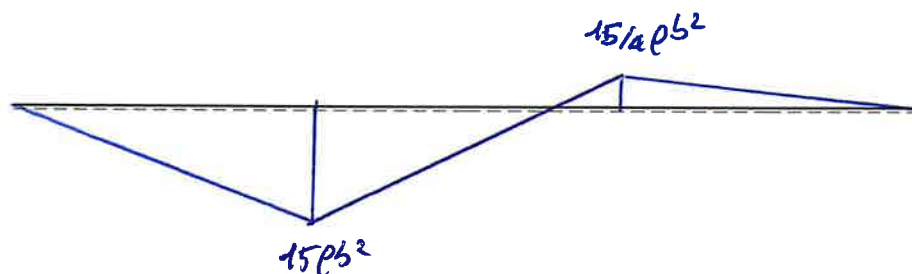
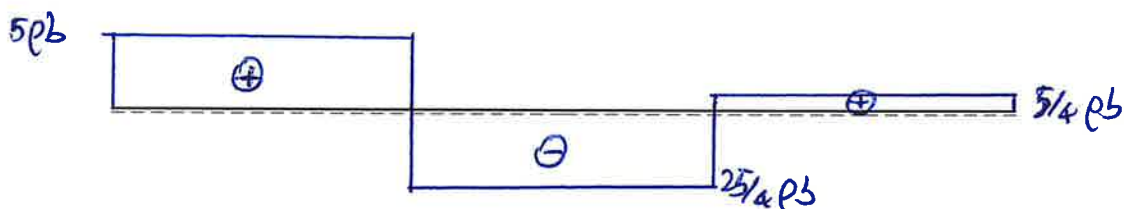
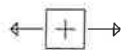
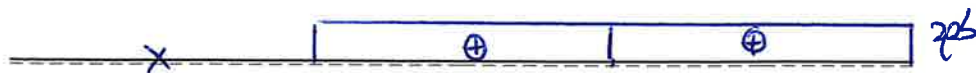


$P_x = (25,381; 15,000)$

$P_y = (0,000; -15,000)$



$\varphi = -24,55$ (°);



$$\begin{aligned}
 H_B (\Rightarrow) &= -2pb; & V_B (\uparrow) &= -45/4 pb; & V_C (\uparrow) &= 15/2 pb; & V_D (\uparrow) &= -5/4 pb; & M_C (\curvearrowright) &= -15/4 pb^2; \\
 N_{AB} &= 11; & T_{AB} &= 5pb; & M_{AB} &= 59pb \times 1; \\
 N_{BC} &= 2pb; & T_{BC} &= -25/4 pb; & M_{BC} &= 15pb^2 - 25/4 pb \times 2; \\
 N_{DC} &= 2pb; & T_{DC} &= 5/4 pb; & M_{DC} &= -5/4 pb \times 3; \\
 \varphi_D &= -15pb^3/8ED;
 \end{aligned}$$